

# Representación y reconstrucción de superficies usando análisis de regresión

## Representation and reconstruction of surfaces using regression analysis

<sup>1</sup>José Arzola R.<sup>a</sup>, <sup>2</sup>Vladimir Rodríguez S.<sup>b</sup>, <sup>2</sup>Jesús Espinola G.<sup>b</sup>, <sup>2</sup>Maximiliano Asis L.<sup>b</sup>

### RESUMEN

Se orienta a la representación y la posterior reconstrucción de cerámicas usando técnicas del Diseño Geométrico. En primer lugar, se realiza la representación de la cerámica en el computador, para lo cual es discretizada la cerámica en un conjunto de puntos ("nube de puntos") con un digitalizador 3D. Luego, se genera un conjunto de parches (trozos) de superficies B-spline unidos con continuidad  $C^1$ , al cual se denomina superficie compleja. Finalmente, se procede a reconstruir (estimar) los pedazos de superficies faltantes correspondientes a la superficie compleja con un error de estimación aceptable. Para tal fin se realiza un método que utiliza de una forma adecuada técnicas de aproximación de funciones, como es el caso del análisis de regresión múltiple. Es así que, se introduce un método novedoso, no tan complejo y con esfuerzo computacional mínimo, pero eficiente para reconstruir superficies de forma local.

**Palabras clave:** Curvas y superficies B-spline; Ajuste de curvas.

### ABSTRACT

This work is guided to the representation and reconstruction of surfaces using technics of the Geometric Design, like the B-spline curves and surfaces and the analysis of multiple regression. Firstly, the representation of the surfaces in the computer is made with discretization of the surfaces with a 3D digitizer. Then, a group of B-spline patches (pieces) is generated united with  $C^1$  continuity. Finally, we proceed to reconstruct (estimate) the pieces of incomplete surfaces with a controllable error, to this end the approach techniques of functions is used, by means of the analysis of multiple regression. In this way, a method is introduced, not so complex and with a minimal computational effort, and appropriate for the reconstruction of surfaces in local form.

**Keywords:** Curves and Surfaces B-Spline; Curve Fitting.

<sup>1</sup>CETER. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría- Cuba. <sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Universidad Nacional Santiago Antúnez de Mayolo.  
<sup>a</sup>Ing. Metalurgista, <sup>b</sup>Lic. en Matemática

## INTRODUCCIÓN

El estudio de curvas, superficies y sólidos como elementos simples, y su composición para obtener objetos complejos ha aglutinado en los últimos años diferentes campos de investigación, convergiendo en una nueva disciplina que se denomina modelado geométrico, que con la ayuda del computador lleva el nombre de diseño geométrico asistido por computadora (CAGD).

Gracias a la evolución de la computación y la informática ha provocado un sinnúmero de aplicaciones, principalmente en el área de la medicina, como es en exámenes tomográficos o la elaboración de prótesis de huesos. Otra área de aplicación de la reconstrucción de superficies viene dada en el campo de la arqueología, para la restauración, conservación de vestigios arqueológicos deteriorados como son esculturas, vasijas, monumentos, ciudades antiguas, etc.

En el presente trabajo se tiene como objetivo general representar la cerámica en el computador con superficies B-spline y posteriormente estimar los pedazos de superficie faltantes mediante una metodología adecuada que usa técnicas de aproximación, todo ello a partir de una muestra de puntos datos, los cuales vienen a ser la discretización (digitalización) del objeto real en estudio, todo ello usando el computador junto con técnicas del diseño geométrico y el análisis de regresión múltiple.

## MATERIALES Y MÉTODOS

### Materiales

Para el desarrollo de la presente investigación, fue necesario contar con los siguientes medios y materiales:

### Equipos

- Una computadora portátil Pentium IV y una Impresora HP deskjet 3550.
- Un digitalizador 3D y una cámara digital Sony.

### Software

- Windows XP profesional
- Software de diseño Asistido por computadora: Para la representación y posterior reconstrucción de superficies se usó el Rhinoceros versión 5.1.
- Software estadístico: Durante el proceso de reconstrucción de superficies y el análisis de regresión se eligió el software STATGRAPHICS versión 5.0 y el Excel 2003.
- Software de cálculo numérico: se utilizó el

software MATLAB versión 6.5 para Windows como herramienta para los cálculos numéricos complejos.

### Métodos

El procedimiento para el desarrollo de métodos de Representación tridimensional de un objeto en el computador se realiza con la siguiente secuencia de pasos:

1. Digitalización del objeto en estudio, usando escáneres o digitalizadores tridimensionales.
2. Generar una estructura tipo alambre con el conjunto de puntos obtenidos en el proceso de discretización, usando el Rhinoceros.
3. Aplicar una continuidad  $C^2$  en el punto de unión de dos curvas para obtener curvas suaves en el paso anterior.
4. A partir de la estructura de alambre ya suavizada proceder a generar en el Rhino los pedazos o parches de superficies, es decir las superficies B spline.

El proceso de reconstrucción de superficies (reconstrucción de la cerámica), es realizado empleando los siguientes pasos:

1. Se realizó una representación tridimensional del objeto de estudio en el computador, de acuerdo a los pasos tratados en el proceso de representación.
2. Luego se quita pequeños trozos de superficies del objeto representado en el computador, para después aplicar la reconstrucción de cada trozo quitado. El trozo quitado nos servirá para evaluar el grado de aceptación del procedimiento empleado durante la reconstrucción de los diferentes tramos (trozos) de la superficie faltante.
3. Utilizar las técnicas del análisis de regresión convenientemente para reconstruir cada tramo de superficie faltante.
4. Una vez reconstruida la pieza, se procede a la comparación de la pieza reconstruida con la quitada, de tal modo se podrá evaluar "que tan próxima" se encuentra la pieza reconstruida a la pieza quitada (pieza real).

## RESULTADOS

### Digitalización y Representación de la Cerámica en el Computador

1. Descripción física y matemática de la cerámica.  
El objeto de estudio con el cual se trabaja es una réplica de una cerámica correspondiente a la época preincaica, dicho objeto es de forma ovoide con 2 estribos tubulares cerrados y un asa (o puente) también de forma tubular.

Matemáticamente, dicha cerámica se representa como una superficie en forma paramétrica, es decir, corresponde a una función paramétrica de la forma  $U \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  para todo  $(u, v) \in U \times V$ , donde  $U$  es llamado plano paramétrico. Geométricamente, la cerámica es descrita como el gráfico de una función paramétrica.

2. Proceso de Discretización del objeto

Se obtiene un conjunto de puntos correspondientes al objeto de estudio, los cuales son transformados en coordenadas cartesianas (x, y, z). Una vez digitalizada la cerámica, dichos puntos se guardan en un formato de archivo del tipo IGES (The Initial Graphics Exchange Specification) u otro formato. En nuestro ejemplo se obtuvo un total de 1601 puntos. Luego se comienza el proceso de representación del objeto en el computador a través de la interpolación de dichos puntos para la generación de las superficies.



Figura 1. Escáner 3D

3. Representación del objeto de estudio en el computador.

Se usa como herramienta computacional el Rhinoceros para la etapa de representación, teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- Se procede a la lectura de los puntos datos con el rhino, los cuales se encuentran en el formato IGES.
- Teniendo como datos los puntos, se procede a crear la interpolación de curvas (interpolación de curvas NURBS) por medio del comando *InterpCrv*, lo cual define los bordes de cada uno de los pedazos de superficie, obteniéndose un "mallado",

- A cada par de tramos de curva generada que inicialmente solo tienen continuidad de contacto (Continuidad  $C^0$ ) se comienza a darle continuidad de tangencia (Continuidad  $C^1$ ) en cada extremo de las curvas, haciendo uso para ello al comando *Match* del RHINO.

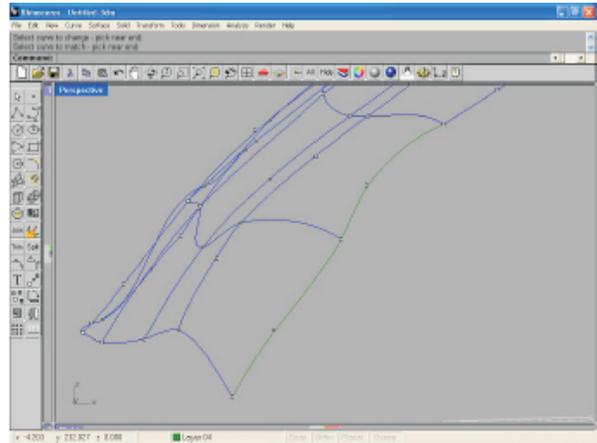


Figura 2. Intersección de curvas con Continuidad  $C^2$

Luego, la forma del objeto de estudio, se puede decir que está representada en modo alambre, la cual posteriormente será cubierta por superficies.

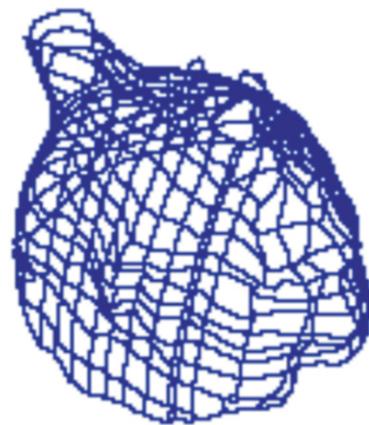


Figura 3. Representación tipo alambre

- Luego se comienza a generar los pedazos de superficies B-spline (NURBS) de grado tres, uno por uno, los cuales son generados a partir del ingreso de los cuatro bordes que definirán la superficie. Para ello se utilizó el comando *EdgeSrf* del RHINO. Este proceso se repite pedazo a pedazo por cada cuatro tramos de curva (superficie B-spline cuadrangular o superficies producto tensorial), los cuales conforman los bordes de dicha superficie a generar.

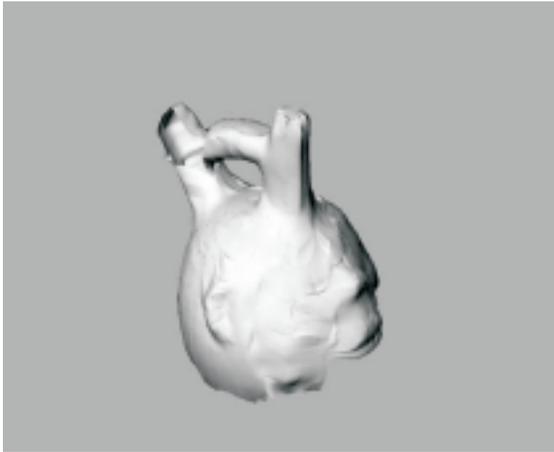


Figura 4. Superficie B-spline generada, imagen renderizada

**Selección de puntos experimentales para la reconstrucción**

Para la selección de los puntos datos experimentales, se realizaron los siguientes pasos:

- Se identifica la superficie faltante a reconstruir, así como también las superficies adyacentes a ésta. La superficie a reconstruir no debe ser demasiado grande con respecto a las adyacentes.

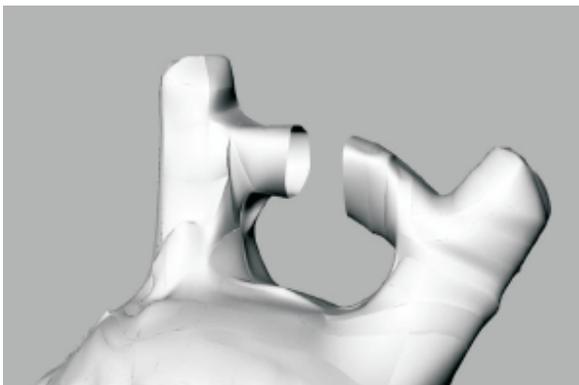


Figura 5. Superficie quitada

- En este ejemplo se calcula el centro geométrico del borde o borde donde sucedió la "rotura" de la

cerámica. Se genera una recta que une dichos centros geométricos y se construye planos que pasen sobre esta recta, los cuales vienen a ser planos de corte sobre la superficie adyacente. Se generan 5 planos de corte alrededor de las superficies adyacentes.

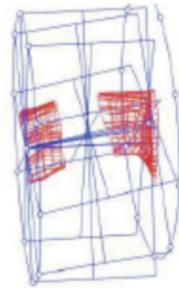


Figura 6. a) Generación de planos de corte

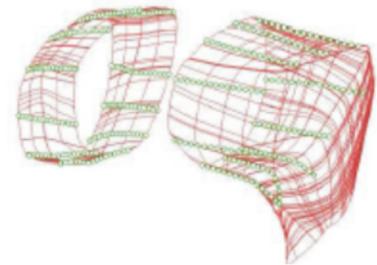


Figura 6. b) Curvas de intersección con los planos

Una vez generados dichos planos alrededor de la superficie de rotura, se procede a la intersección de la superficie con tales planos de corte, generándose de esta manera una serie de curvas sobre superficies. En nuestro ejemplo se obtuvo curvas en ambas superficies adyacentes, es decir, por cada intersección con un plano de corte se obtuvo dos curvas, haciendo un total de 20 curvas, las cuales serán tratadas de dos en dos.

Se discretiza las curvas generadas por cada plano de corte que se hizo a la superficie. De esta forma se obtiene inicialmente un conjunto de 30 puntos por cada par de curvas, los cuales serán de gran ayuda para la generación de puntos en la región faltante.

**Generación de los puntos para la reconstrucción de la superficie.**

En la reconstrucción de la superficie faltante, primero se procede a la generación de puntos en dicha región faltante. Usando técnicas de análisis de regresión como herramientas de generación de funciones aproximatorias, se desarrollaron los siguientes pasos:

Una vez obtenido el conjunto de puntos experimentales generados por los planos de corte, se procede al tratamiento estadístico de dichos puntos usando el software estadístico STATGRAPHICS. Para la cerámica se considera un conjunto de 30 puntos con coordenadas  $X$ ;  $Y$  y  $Z$ , los cuales corresponden a la discretización de una de las curvas a estimar.

Tabla 1. Curva discretizada en 30 puntos (x,y,z)

	X	Y	Z		X	Y	Z
1	40,9301	6,1825	63,3235	17	43,329	18,2493	62,3201
2	41,0476	6,99005	63,2249	18	44,2321	29,2012	60,4816
3	41,1949	7,79848	63,148	19	44,2304	29,7277	60,3603
4	41,349	8,60239	63,0769	20	44,2261	30,2543	60,2371
5	41,5032	9,40818	63,0055	21	44,2176	30,78	60,1111
6	41,6564	10,2127	62,9338	22	44,2029	31,3039	59,981
7	41,81	11,0183	62,862	23	44,1802	31,8266	59,8453
8	41,9651	11,8256	62,791	24	44,15	32,3471	59,7047
9	42,122	12,6308	62,7217	25	44,1146	32,8668	59,5605
10	42,2813	13,4351	62,6544	26	44,0762	33,3849	59,4144
11	42,4435	14,2384	62,5894	27	44,0755	33,9117	59,2939
12	42,6095	15,0433	62,5269	28	44,1086	34,4417	59,1971
13	42,7794	15,8452	62,4678	29	44,1482	34,9731	59,1049
14	42,9552	16,648	62,4128	30	44,1814	35,5041	59,008
15	43,138	17,45	62,3631				
16	43,138	17,45	62,3631				

- Se procede a la parametrización de cada uno de los puntos. Esta parte es crítica, pues una buena elección dará un mejor ajuste en el proceso de regresión. La parametrización que es usada es la distancia “acumulada”.

Tabla 2. Parametrización acumulada de los 30 puntos

	U		U
1	0,818355	16	23,4273 38
2	1,636027	17	23,959319
3	2,455914	18	24,491652
4	3,273221	19	25,023273
5	4,092241	20	25,553244
6	4,911248	21	26,082195
7	5,729225	22	26,609204
8	6,549751	23	27,135826
9	7,36737	24	27,661337
10	8,186525	25	28,196449
11	9,006015	26	28,735212
12	9,82323	27	29,27544
13	10,64249	28	29,815277
14	11,45992	29	30,352779
15	12,27862	30	30,886

- Se empieza a usar el análisis de regresión utilizando el statgraphics, teniendo como variables independientes el parámetro  $u$  y como variable dependiente las coordenadas de los puntos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Se hace uso de una combinación de los modelos: potencial, logarítmico, lineal, cuadrático y cúbico, empleándose el siguiente modelo general:

$$f = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + a_4 U$$

donde  $f$  es la variable dependiente, así son los estimadores,  $U$  es el parámetro y un estimador que es calculado previamente mediante el modelo potencial. Al aplicar el statgraphics se obtuvo los siguientes resultados:

Teniendo como variable dependiente  $f = X y = 0,0265068$  se tiene:

Tabla 3. Resultados de Statgraphics para los puntos aproximados

parametros	estimadores	Error estándar	P-valor
CONSTANT	16.8404	3.167	0.0000
U2	0.00901117	0.000587777	0.0000
U3	-0.000211367	1.24429E-05	0.0000
XUA	21.0964	3.05281	0.0000

Tabla 4. Resultados del Análisis de la Varianza

origen	Suma de cuad.	Df	mínimo cuad.	P-valor
Model	55.6988	3	18.5663	0.0000
Residual	1.03552	26	0.0398275	0.0000
Total (Corr.)	56.7343	29		

R-cuadrado = 98.1748 por ciento

R-cuadrado (ajustado para d.f.) = 97.9642 por ciento

Error Estándar de Estimación = 0.199568

Error mínimo cuadrado = 0.138934

Esto indica que el resultado de ajustar un modelo de regresión lineal múltiple describe la relación entre  $X$  y la variable  $U$ . Dicha ecuación del modelo de ajuste es:

$$X = 16,8404 + 0,00901117 * U^2 - 0,000211367 * U^3 + 21,0964 * U^{0,0265068}$$

Puesto que p-valores en la tabla de análisis de la variable dependiente es menos que 0.01, estadísticamente, hay una relación significativa entre las variables en un nivel de aceptación del 99 por ciento.

Puesto que el P-valor es casi nulo en cada variable independiente, y el grado de correlación es alto, no es necesario mover cualquiera de las variables del modelo. Resultados similares se obtiene para el caso de las variables  $Y$  y  $Z$ .

**Generación de la superficie faltante y análisis del error**

Para generar y luego controlar el error de estimación se tuvo en cuenta los siguientes pasos:

1. Una vez estimados los puntos sobre la superficie faltante generamos las curvas que interpolan estas curvas y comparamos dichas curvas con las originales, las que fueron quitadas inicialmente, para verificar la efectividad del método empleado. Para ello se hizo uso de la siguiente fórmula, que viene a ser la desviación estándar de todo el conjunto de puntos estimados:

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{\bar{j}} \sum_{i=1}^{\bar{i}} (x_{i,j}^1 - x_{i,j}^2)^2 + (y_{i,j}^1 - y_{i,j}^2)^2 + (z_{i,j}^1 - z_{i,j}^2)^2}{\sum_{j=1}^{\bar{j}} \bar{i}_j}}$$

donde:

$\bar{j}$  es el número de curvas generadas por los planos de corte, que varía de 1 hasta 10

$\bar{i}$  es el número de puntos generados en la curva  $j$ .

En nuestro ejemplo se tuvo un error estándar de 0.038862608

— Estimada  
— Original

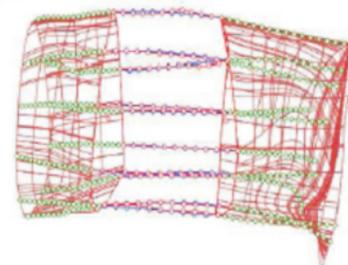


Figura 7. Comparación entre superficie aproximada y original

2. Luego de estimados los puntos sobre la región faltante se procede a aplicar la interpolación de superficies sobre esta. Este procedimiento es similar al realizado en el proceso de representación de una superficie.

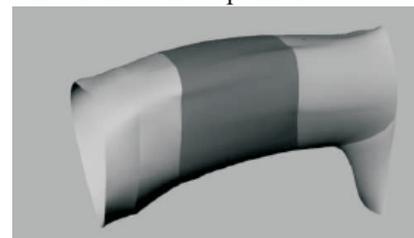


Figura 8. Superficie reconstruida

## DISCUSIÓN

El problema de representar un objeto real mediante superficies en el computador a través de un conjunto de puntos datos, es una técnica importante para representar diferentes objetos tridimensionalmente. En los últimos 20 años se ha desarrollado considerablemente varias técnicas para ello. Al inicio eran solamente aplicadas a la ingeniería para el diseño de partes de automóviles, de aviones y buques, y también en la tecnología espacial; posteriormente, con el avance de la tecnología fueron aplicadas en la medicina, teniendo bastante aceptación y siendo uno de los mayores logros alcanzados por el diseño geométrico asistido por Computadora, principalmente en la representación tridimensional de los exámenes tomográficos y recientemente en la reconstrucción de huesos para la creación de prótesis de metal. En estos últimos años ha surgido un gran interés en la industria cinematográfica, porque está revolucionando considerablemente la animación de objetos reales y/o imaginarios, objetos que son creados inicialmente usando superficies NURBS.

La arqueología es una de las recientes aplicaciones del CAGD, que puede ser utilizado para la restauración de diferentes piezas arqueológicas como son monumentos, estatuas, cerámicas, etc., en la representación digital a escala de ciudades antiguas, para la restauración de pinturas o imágenes fotográficas deterioradas. En la paleontología, sobre todo de restos óseos, tanto de seres humanos como de dinosaurios, de los cuales se hace una reconstrucción tridimensional a partir de sus huesos, para luego simularlo en la computadora y así obtener una representación animada y poder idealizar dichas criaturas para un mejor estudio.

### Ventajas y Desventajas

Hoy en día existen varias investigaciones sobre la reconstrucción de superficies. Estos métodos aplicados a la arqueología están mayormente orientados a la restauración de superficies, es decir a objetos deteriorados por el paso del tiempo y no tanto a objetos "rotos". Estos trabajos aplican técnicas de mallado de superficies, técnicas de interpolación con restricciones, y en algunos los elementos Finitos, los cuales obviamente requieren un esfuerzo computacional bastante amplio.

Trabajos en la medicina, para reconstruir prótesis de huesos. Podemos mencionar el artículo "Surface Interpolation with radial basis functions Foz

medical" imaging", en el cual hace la reconstrucción de un cráneo humano para obtener una prótesis; esta técnica de Bases Radiales es presentada como una solución al problema de interpolación de superficies incompletas para imágenes médicas 3D.

## CONCLUSIONES

1. Se confirma que es posible aplicar una modelación matemática adecuada usando el diseño geométrico asistido por computadora para la representación de superficies, donde dicha superficie generada viene a ser un conjunto de superficies B-spline de tercer grado, unidas con continuidad de tangente (continuidad o suavidad  $C^1$ ).
2. El proceso de reconstrucción (estimación) de la superficie faltante es realizado por medio de aproximación de curvas (aproximación de funciones), haciendo uso para tal fin del análisis de regresión múltiple.
3. Las técnicas del análisis de regresión permiten realizar estimaciones adecuadas de las funciones generatrices de las superficies faltantes, siempre que se realice una adecuada selección de la estructura del modelo a emplear, en el trabajo para estimar puntos sobre la región faltante a partir de un conjunto de puntos datos, es empleado el siguiente modelo por cada coordenada  $X, Y$  y  $Z$ :
 
$$w = a_0 + a_1 \ln t + a_2 t^b + a_3 t + a_4 t^2 + a_5 t^3$$
 donde  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  y  $b$  son parámetros a estimar .
4. El error de estimación de los puntos sobre la superficie faltante crece exponencialmente a medida que la región (curvas) Faltante crece con respecto a la región (curvas) total.
5. Debido al error que se produce a medida que la región faltante es mayor, el presente método es aplicable para reconstruir superficies localmente, es decir, en regiones no demasiado grandes en proporción a la superficie total (superficie adyacente más la superficie faltante).
6. La reconstrucción de superficies es aplicada con éxito sobre superficies suaves, es decir, la superficie no sufre cambios bruscos como pueden ser los picos elevados o mucha oscilación.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARZOLA, José. 2000. Sistemas de Ingeniería. Cuba: Ed. Félix Varela.

CALERO, Aristides. 2003. Estadística II. Cuba: Ed. Félix Varela.

Carvalho P., Figueiredo L., Gomes J. 2003. Mathematical Optimization in Graphics and Vision. Perú : Monografías del IMCA.

Farin y Hoscheck J. 1999. HandBook of Computer Aided Geometric Design. ElSevier Science.

Hoschek J., Lasser D.1992, Fundaments of Computer Aided Geometric Design, Wellesley - Massachusetts : Edit. A. K. Peters,.

Rafael. Ferré Masip.1998. Diseño Industrial por computador 2. España: Colección Productica.

Rogers D., Adams A.1989, Mathematical Elements For Computers Graphics, USA: Ed. McGraw-Hill.

### **Correspondencia:**

José Arzola R.  
Instituto Superior Politécnico  
José Antonio Echeverría  
Habana  
cter.cujie.edu.cu