

# Yupana o ábaco inca, a 100 años (1912-2022): experiencias y posibilidades de educación matemática en América Latina

## Yupana or Inca abacus, 100 years (1912-2022): experiences and possibilities of mathematics education in Latin America

Henry-Mark Vilca-Apaza<sup>1,a</sup>, William Walker Mamani Apaza<sup>1,b</sup>, Beker Maraza Vilcanqui<sup>2,c</sup> y Wilfredo Hernán Bizarro Flores<sup>3,d</sup>

<sup>1</sup>Universidad Nacional del Altiplano, Puno, Perú.

<sup>2</sup>Universidad Nacional Intercultural de la Amazonia, Pucallpa, Perú.

<sup>3</sup>Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

\*ORCID: [0000-0001-6982-7645](https://orcid.org/0000-0001-6982-7645) E-mail: [hvilca@unap.edu.pe](mailto:hvilca@unap.edu.pe)

<sup>b</sup>ORCID: [0000-0003-3313-0998](https://orcid.org/0000-0003-3313-0998) E-mail: [wwmamani@unap.edu.pe](mailto:wwmamani@unap.edu.pe)

<sup>c</sup>ORCID: [0000-0002-0155-4094](https://orcid.org/0000-0002-0155-4094) E-mail: [umarazav@unia.edu.pe](mailto:umarazav@unia.edu.pe)

<sup>d</sup>ORCID: [0000-0003-0267-6322](https://orcid.org/0000-0003-0267-6322) E-mail: [wbizarrof@unmsm.edu.pe](mailto:wbizarrof@unmsm.edu.pe)

Recibido: 10/12/2022

Aceptado: 09/03/2023

Sección: Artículo de Revisión

### Resumen

Desde el hallazgo de El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno de Guamán Poma en 1908 y la publicación de la yupana en 1912, esta herramienta de cálculo ha sido motivo de estudios acerca de su funcionamiento, a partir de los cuales se han desarrollado experiencias de aplicación en educación matemática. En ese marco, el artículo tiene por objetivo analizar los avances en cuanto a investigaciones y propuestas desarrolladas sobre la yupana en el campo de la educación matemática, con el propósito de visibilizar nuevas posibilidades de aplicación e investigación. La técnica empleada es la revisión documental de informes, tesis y artículos científicos producidos en Latinoamérica. Los resultados muestran que es harto estudiado los efectos de la yupana en el aprendizaje de las operaciones básicas; sin embargo, la yupana tiene múltiples potencialidades, aún desconocidas, que deben ser estudiadas, como su eficacia en el aprendizaje de números decimales, fraccionarios, radicales, enteros, matrices, logaritmos y vectores, más aun habiéndose desarrollado modelos digitales. Se sugiere implementar e investigar el uso de la yupana con el método Radicati a fin de favorecer el desarrollo del pensamiento formal.

**Palabras clave:** Yupana; ábaco inca; educación matemática; material didáctico; etnomatemática; operaciones aritméticas.

### Abstract

Since the discovery of El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno by Guamán Poma in 1908 and the publication of the yupana in 1912, this calculation tool has been the subject of studies about its operation, from which experiences of application have been developed in mathematics education. Within this framework, the article aims to analyze the advances in terms of research and proposals developed on the yupana in the field of mathematics education, with the purpose of making visible new application and research possibilities. The technique used is the documentary review of reports, theses and scientific articles produced in Latin America. The results show that the effects of the yupana on the learning of basic operations have been extensively studied; however, the yupana has multiple potentialities, still unknown, that must be studied, such as its effectiveness in learning decimal, fractional, radical, integer numbers, matrices, logarithms, and vectors, even more so having developed digital models. It is suggested to implement and investigate the use of the yupana with the Radicati method in order to favor the development of formal thought.

**Keywords:** Yupana; inca abacus; mathematics education; didactic material; ethnomathematics; arithmetic operations.

#### Cómo Citar:

Vilca-Apaza, H.-M., Mamani Apaza, W. W., Maraza Vilcanqui, B., & Bizarro Flores, W. H. (2023). Yupana o ábaco inca, a 100 años (1912-2022): experiencias y posibilidades de educación matemática en América Latina. *Comuni@cción: Revista De Investigación En Comunicación Y Desarrollo*, 14(1), 86–102. <https://doi.org/10.33595/2226-1478.14.1.804>

**Introducción**

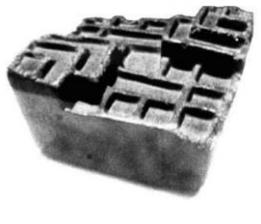
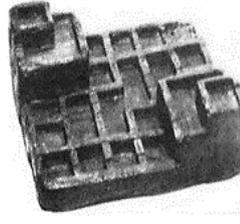
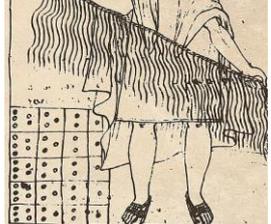
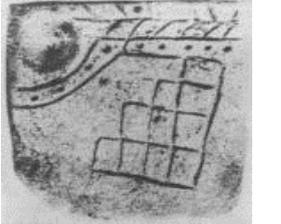
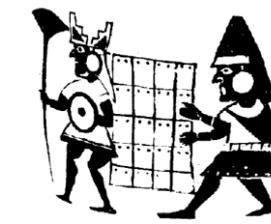
Los ábacos fueron desarrollados por diversas culturas. Los incas, cuyo territorio se extendía desde Chile y Argentina hasta el río Mayo - Colombia (Pareja, 1986), idearon la yupana, aunque hay evidencia de su existencia antes del apogeo inca (Moscovich, 2007). El término fue acuñado por W. Burns tomando el vocablo quechua *yupay* que significa ‘contar’, y no del aimara como sugieren Leonard y Shakiban (2010). Fue manipulada por los *kipukamayuc* para llevar la contabilidad (Pareja, 1986; Mora y Valero, 2019; Paragua et al., 2021).

Con la conquista hispana, murió el caudal de conocimientos precolombinos. Lo que se sabe hoy de la yupana es gracias a las fuentes escritas de la Colonia y a los hallazgos arqueológicos de la yupana de madera de Chordeleg (Fig. 1.a) en 1869 (Radicati, 1951; Carrillo, 2020) y la yupana de piedra de Huancarcuchu (Fig. 1.g) en 1922 (Micelli y Crespo, 2012), en Ecuador. En Perú,

la yupana de piedra de Caraz en 1878; la yupana de madera de Chan Chan-Trujillo (Fig. 1.b) en 1967; la yupana de piedra del Callejón de Huaylas (Fig. 1.e) en 1931; las yupanas de arcilla y de hueso de Ica (Fig. 1.f) en 1959; la yupana de barro de Huacones-Cañete (Fig. 1.c) (Tord, 2019); la yupana en la vasija Moche (Fig. 1.h) en 1967, sindicado erróneamente a los incas por Micelli y Crespo (2012).

Además de motivos rituales, se tejieron tres hipótesis sobre el uso de las yupanas: maquetas arquitectónicas, instrumentos de contabilidad y tableros de juegos. La primera teoría se basa en Chordeleg por presentar recintos cuadrados (Apaza, 2017), sin sostenibilidad, pues no existen viviendas con tales diseños. La teoría más aceptada es que son tableros de contabilidad. Desde su hallazgo, en 1908, se han desarrollado varios métodos o interpretaciones sobre su uso como tablero, el de Wassén (1931), Radicati (1951), Burns (1981), De Pasquale (2001), Moscovich (2007), Cinzia (2008) y Chirinos (2010).

**Figura 1**  
*Yupanas arqueológicas y etnológicas.*

			
a. Yupana de Chordeleg, Ecuador.	b. Yupana de Chan Chan, Perú.	c. Yupana de Huacones, Cañete, Perú.	d. Yupana de Guamán Poma.
			
e. Yupana del Callejón de Huaylas. (Museo Arqueología del Perú - Daniel Gannoni)	f. Yupana de arcilla y de hueso, Ica-Perú.	g. Yupana de Huancarcuchu, Ecuador.	h. Yupana en Vasija moche, Perú.

Fuente: Radicati (1951) y Espitia (2018).

Además de los mencionados, la yupana ha recibido el interés de M. Rostworowski (1981), Pereyra Sánchez (1990), Aitken-Soux y Ccama (1990), J. Ansión (1990), M. Orlando (2002; 2003), P. Álvarez (2004), Laurencich y Rossi (2007), J. Christie (2009), R. Cuba (2010), M. Tun (2014), E. Aquisé (2015), Altieri y Mackey, y otros.

A partir de las interpretaciones de Radicati y Burns, se han desarrollado experiencias sobre la yupana como material educativo, especialmente para la escuela rural, en diversos países de Latinoamérica. Sin embargo, no se conoce con precisión cuáles y cuántas son las investigaciones y experiencias desarrolladas en educación matemática, qué temáticas se han abordado,

en qué países y niveles educativos, qué métodos y modelos de yupana se han desarrollado. Solo se sabe de manera genérica que existen estudios sobre las bondades didácticas de la yupana en la matemática en Perú, Ecuador y Bolivia (Montalvo-Castro, 2014), y una aproximación sobre los soportes documentales e idiomas más utilizados para publicar investigaciones sobre el *kipu*, *yupana* y *tocapu* (Urbizagástegui, 2014). Por tanto, el objetivo del presente es analizar las investigaciones realizadas sobre la aplicación de la yupana en el aprendizaje de la matemática en América Latina, para coadyuvar a la formación de profesores etnomatemáticos (Blanco-Álvarez et al., 2017), delinear campos aún no explorados y, reorientar sus aplicaciones y futuras investigaciones.

### Marco teórico

Fue el hallazgo de Richard Pietchmann, en la Biblioteca Real de Copenhague de El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno (1615) de Felipe Guamán Poma de Ayala en 1908 y publicada en 1912 en las actas del Congreso de Americanistas de Londres-Francia, que marcó un hito. El dibujo de la página 360, de un *kipukamayuyq* (contador mayor) que lleva un *kipu* y al lado izquierdo inferior una *yupana* de cuatro filas por cinco columnas con círculos blancos y negros en las cantidades de 5-3-2-1 (Fig. 1.d), permitió descifrar el método de funcionamiento.

El dato de Guamán Poma (1987 [1615]): “Cuentan en tablas, numeran de cien mil, y de diez mil, y de ciento, y de diez, hasta llegar a una” (p. 361); de José de Acosta (2008[1590]): “tomarán... sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasaran un grano de aquí; trocarán tres de acullá... ellos salen con su cuenta... sin errar tilde” (p. 211); de Garcilaso de la Vega (1959[1609]): “hacían las cuentas... con piedrezuelas... y las sacaban tan ajustadas... cosa que nuestros aritméticos suelen hacer con mucha dificultad” (T-I, p. 245) y de Juan De Velasco (1789): “depósitos hechos de madera, de piedra o de barro, con diversas separaciones, en las cuales se colocaban piedrecillas” (T-II, p. 11), que evidencia la habilidad mental y matemática inca, permitió desarrollar teorías interpretativas sobre el método de uso de la yupana que, por razones de espacio, se revisan las más relevantes.

**Interpretación de Henry Wassén (1931).** Wassén hizo el primer acercamiento al funcionamiento de la yupana de Guamán Poma respetando su posición original (vertical). Para este método, los círculos blancos son los hoyos del tablero, y los negros, fichas de cálculo. Las filas están organizadas en orden decimal: Unidades

en la fila inferior; Decenas, Centenas y Unidades de Millar, respectivamente. Los casilleros de las filas adquieren los valores de 5, 15, 30 y 30 (Radicati, 1951; Murillo, 2010), debido a que, en el primer casillero cada agujero tiene el valor de uno ( $1 \times 5 = 5$ ); en el segundo, cinco ( $5 \times 3 = 15$ ), en el tercero, quince ( $15 \times 2 = 30$ ) y en el último, treinta ( $30 \times 1 = 30$ ). El número 8 se representaría con tres fichas en la columna A ( $3 \times 1 = 3$ ) y uno en la columna B ( $1 \times 5 = 5$ ), luego  $3 + 5 = 8$  (Fig. 2). El método, al ser poco práctico, incompatible con el sistema decimal y un recurso poco apropiado para la enseñanza de la numeración (Hernández, 2004), quedó desfasada, sirviendo de base a otros estudios.

**Figura 2**  
 Representación del 8 en la yupana de Wassén

	A	1	B	5	C	15	D	30
4 10	○ ○ ○		○ ○		○ ○		○	
3 10	○ ○ ○		○ ○		○ ○		○	
2 10	○ ○ ○		○ ○		○ ○		○	
1 10	○ ○ ○		○ ○		○ ○		○	
0 10	● ○ ○		○ ○	●	○ ○		○	

Fuente: Cinzia (2008).

**Interpretación de Carlos Radicati Di Primeglio (1951).** A diferencia de Wassén, el tablero de Radicati no lleva grabado los círculos. Los valores se representan y calculan mentalmente. No parece que los incas hayan previsto las perforaciones, cada casilla de acuerdo a su posición adquiere un valor distinto. El tablero tiene los valores de 5-3-2-1, para todas las filas, multiplicadas por las potencias de base 10 (Pacheco, 1999). Los valores en la primera fila (Unidades) son  $5 \times 10^0 = 5$ ;  $3 \times 10^0 = 3$ ;  $2 \times 10^0 = 2$ ;  $1 \times 10^0 = 1$ ; en la segunda (Decenas),  $5 \times 10^1 = 50$ ;  $3 \times 10^1 = 30$ ;  $2 \times 10^1 = 20$ ;  $1 \times 10^1 = 10$ , en la tercera (Centenas),  $5 \times 10^2 = 500$ ;  $3 \times 10^2 = 300$ ;  $2 \times 10^2 = 200$ ;  $1 \times 10^2 = 100$ , en la cuarta (Unidades de Millar),  $5 \times 10^3$ ;  $3 \times 10^3$ ;  $2 \times 10^3$ ;  $1 \times 10^3$ , en la quinta fila (Decenas de Millar),  $5 \times 10^4$ ;  $3 \times 10^4$ ;  $2 \times 10^4$ ;  $1 \times 10^4$ . La ficha adquiere un valor dependiendo del casillero en el que se ubique. Por ejemplo, el número 20 se representa colocando una ficha en la casilla ‘2’ de la segunda fila (Decenas).

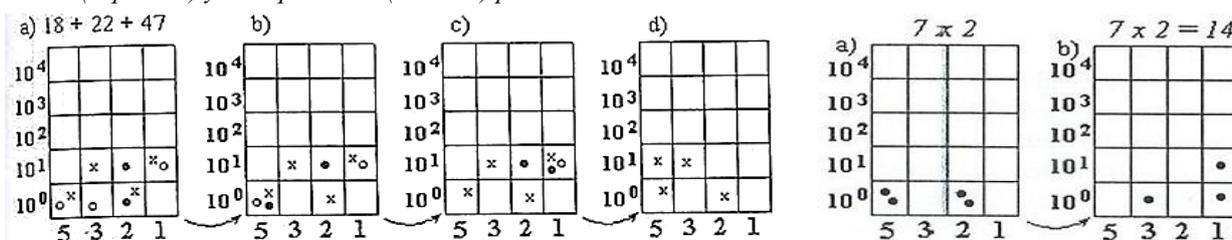
En la adición  $18 + 22 + 47$ : En a) están representados los sumandos, 18 con ‘o’, 22 con ‘l’ y 47 con ‘x’ (Figura

3, a)). En b) 2 y 3 se han simplificado a 5 representado con una ficha en la casilla '5' de la primera fila. En c), en la casilla '1' de las decenas, tenemos ahora tres fichas (30), más una de la casilla '2' (20), hacen 50 que es representado con una ficha en '5'. En d), no habiendo más simplificaciones, se tiene la respuesta (Fig. 3, d)).

Para multiplicar 7x2 (Fig. 3, derecha), se representa 7 dos veces en los casilleros '5' y '2'. Luego, las fichas de la casilla '2' hacen 4 (una ficha en la casilla '3' y otra en la '1'), en tanto las fichas de la casilla '5' hacen 10 (una ficha en la casilla '1' de las decenas).

**Figura 3**

Adición (izquierda) y multiplicación (derecha) por el método Radicati



Fuente: Radicati, 1951.

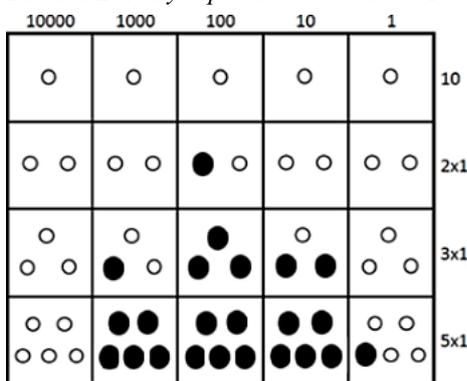
**Interpretación de William Burns Glynn (1981).** Respecto de sus antecesores, Burns desarrolló un método objetivo y práctico, girando la yupana en 90° en sentido contrario a las agujas del reloj (forma horizontal) (Fig. 4). Cual Tablero de Valor Posicional, de derecha a izquierda, representa a unidades, decenas, centenas, miles y diez miles. Cada ficha vale 1, no importa el casillero en el que esté. Las cantidades 5-3-2-1 están en progresión ascendente vertical. Los círculos de las tres primeras filas suman 10, suficiente para representar los números en el sistema decimal (Hernández, 2004). La casilla '1' es la 'memoria' y equivale a 10. El número 6971 se representa con cinco fichas en la casilla '5' y una en la casilla '3' de la columna de miles (seis mil); cinco en la casilla '5', tres en la casilla '3' y una en la casilla '2' de las Centenas (novecientos); cinco en la casilla '5' y dos en la casilla '3' de las Decenas (setenta) y, una en la casilla '5' de las Unidades (uno).

**Interpretación de Nicolino De Pasquale (2001).** De Pasquale hizo una interpretación similar a la de Wassén, bajo el sistema de numeración cuadregesimal (Murillo, 2010), manteniendo la posición original de la yupana. Cada círculo toma el valor de 5 en la primera columna (5x5=25), 3 en la segunda (3x3=9), 2 en la tercera (2x2=4) y 1 en la cuarta (1x1=1), haciendo una sumatoria en todas las filas de 39. Un número como 100 se representaría de la siguiente forma:  $2 \times 1 \times 40^1 = 80 + 5 \times 2 \times 40^0 = 10 + 3 \times 3 \times 40^0 = 9 + 1 \times 1 \times 40^0 = 1$  (Fig. 5). Este método no está conforme a las características de las culturas americanas (Leonard y Shakiban, 2011). Si bien es funcional aún con problemas metodológicos, el sistema en base 40 no se conocía en el Ande (Moscovich, 2007; Cinzia, 2008).



**Figura 4**

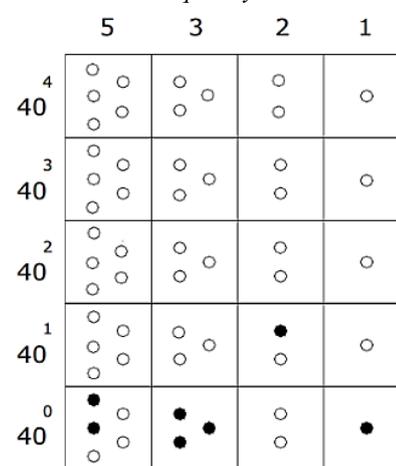
Tablero Burns y representación de 6971



Fuente: Burns (1981).

**Figura 5**

Tablero De Pasquale y número 100



Fuente: De Pasquale (2001).



**Interpretación de Andrés Chirinos Rivera (2010).**

Para Chirinos, la yupana opera con los 11 agujeros. En la primera fila, de derecha a izquierda, cada círculo tiene valores de 0,1 a 1,1; en la segunda fila, de 1 a 11, en la tercera, de 10 a 110, en la cuarta, de 100 a 1100 y en la quinta, de 1000 a 11000. Plantea que los incas adoptaron un sistema sexagesimal igual a los sumerios. Se puede representar los números de tres formas: ‘acoplada’, ‘desacoplada’ y ‘concreta’. En la Figura 8 se representa el número 23 con la primera y segunda formas, utilizando “u” y “n”.

**Figura 8**  
*Representación de números por Chirinos*


Fuente: Chirinos (2010).

**Metodología**

El estudio corresponde al enfoque cualitativo, siendo la técnica empleada la revisión de literatura de investigaciones y experiencias sobre los efectos de la yupana en la educación matemática realizadas hasta el 2021, a nivel de América Latina, específicamente en Perú, Ecuador, Bolivia, Chile y Colombia. Las unidades de análisis fueron las tesis (segunda especialidad, pre y posgrado), artículos científicos (en bases de datos) y experiencias, obteniéndose 46 trabajos académicos, algunos de acceso restringido. Se extrajo información vía rastreo virtual de páginas como la de la Biblioteca virtual del CONCYTEC - Perú (<https://biblioteca.concytec.gob.pe>), portal Scopus, Scielo (<https://scielo.org>), Latindex (<https://latindex.com>), Google académico (<https://scholar.google.es>) y repositorios institucionales. Se hizo una búsqueda ampliada mediante las palabras clave ‘yupana’, ‘ábaco inca’ y ‘calculadora inca’.

La estrategia de análisis de información consistió en identificar el documento con información relevante y relacionado al objetivo del estudio. Los datos se analizaron con apoyo de la estadística descriptiva, considerando criterios como el tema abordado, país de desarrollo, nivel educativo en el que se experimentó, los modelos desarrollados y el método más empleado. Se exponen las experiencias innovadoras, en tanto otros solo fueron referenciados con fines de consulta posterior.

**Resultados y discusión**

**La experiencia pionera de Martha Villavicencio Ubillús, Perú, 1982**

En 1982, en el marco de la política de Educación Bilingüe del siglo XX, a fin sanar los procesos cognitivos violentados por la enseñanza memorística de la matemática, consecuencia de la educación castellanizante (Vilca-Apaza *et al.*, 2021), Villavicencio adaptó la yupana de Burns, con criterio pedagógico, para que niños de primeros grados de escuelas bilingües (castellano-quechua/aimara) aprendan manipulando. Las columnas (orden posicional), de derecha a izquierda, llevan la letra S de *sapankuna* (Unidades); Ch, *chunkakuna* (Decenas); P, *pachaqkuna* (Centenas); W, *waranqakuna* (Millares); y ChW, *chunka waranqakuna* (Decenas de Millar). Los casilleros contienen 5, 3 y 2 agujeros respectivamente, recortando el 1. En la adición,  $234+45=279$ , el primer sumando, se representa con 4 fichas en las Unidades, 3 en las Decenas y 2 en las Centenas; el segundo sumando, con 5 fichas en las Unidades y 4 en las Decenas. El resultado se obtiene por simplificación (Fig. 9).

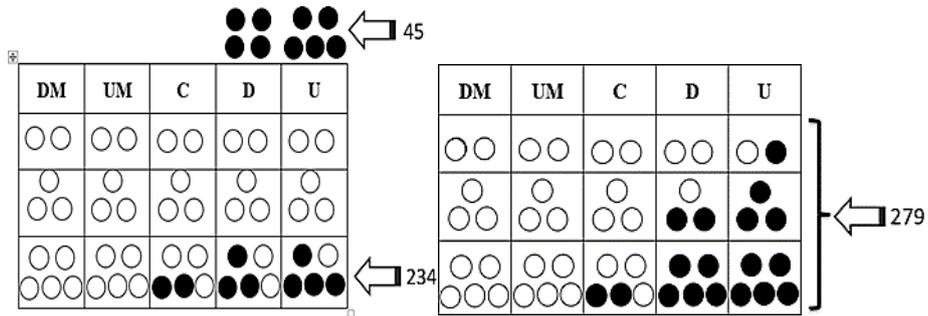
Para efectuar la resta  $67-43=24$ , se coloca primero las fichas del minuendo (6 fichas en las Decenas y 7 en las Unidades); luego, como el sustraendo es la cantidad a quitar, retiramos 3 fichas de las Unidades y 4 de las Decenas. Las restantes son el resultado (diferencia).

**La yupana expuesta por Oscar Pacheco, Bolivia, 1999**

Pacheco (1999), al estilo de Villavicencio, expone la experiencia boliviana, siguiendo el método Burns. En la multiplicación  $23 \times 3 = 69$ , basta repetir el multiplicando (23) tantas veces indique el multiplicador (3), una vez en a), 2 veces en b), 3 veces en c) y tenemos el producto (69) en d) (Fig. 11).

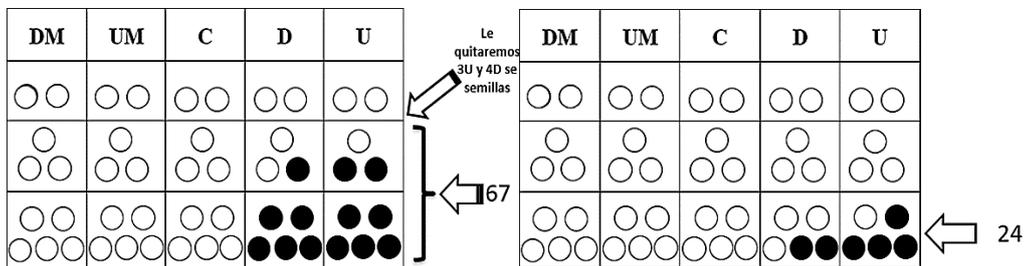


**Figura 9**  
 Adición en el modelo Villavicencio



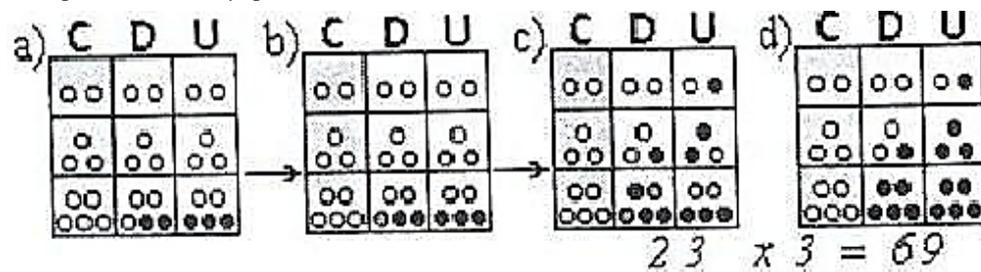
Fuente: Guzmán et al. (2018)

**Figura 10**  
 Sustracción de dos cifras



Fuente: Guzmán et al. (2018).

**Figura 11**  
 Multiplicación en la yupana

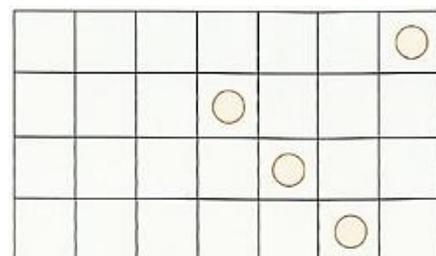


Fuente: Pacheco (1999).

**Yupana dinámica y radicales de Carlos Hernández, Colombia, 2004**

Hernández (2004) desarrolló un modelo rectangular de yupana para calcular la raíz cuadrada, aplicando el método Radicati. El número 2351 se representa en la yupana de la Figura 12. El cálculo de la raíz cuadrada de un número necesita dos yupanas de siete órdenes. Es muy probable que en operaciones complejas se haya requerido de yupanas adicionales para almacenar granos (Leonard y Shakiban, 2010). El método empleado se llama Genocidio, y consiste en eliminar cantidades.

**Figura 12**  
 Yupana dinámica y representación de 2351



Fuente: Hernández (2004).

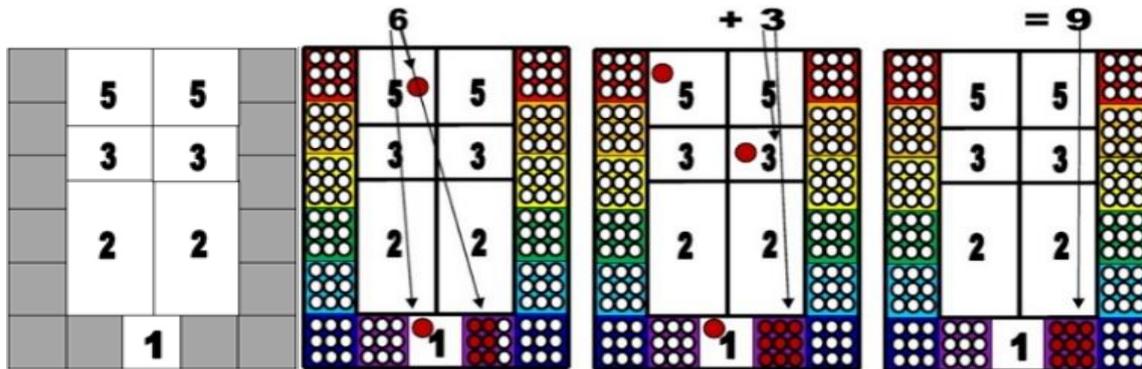
### El modelo de Miguel Pinto Tapia, Perú, 2010

Pinto (2010) desarrolló una experiencia con la yupana arqueológica del Callejón de Huaylas (Fig. 1.e), descifrada por De Pasquale. Esta yupana tiene dos áreas: registro y cálculo. El primero tiene 14 divisiones (área sombreada), el lado derecho registra números naturales y el izquierdo, decimales. El segundo tiene

siete divisiones internas con los valores 1-2-3-5 (Fig. 13). Al sumar  $6+3=9$ , se representa el primer sumando en el área de cálculo y se pone cuentas en el casillero de las unidades; luego, se representa el segundo sumando y se agrega cuentas en casillero de las unidades. Finalmente, se cuenta lo que se ha reunido, siendo el resultado.

**Figura 13**

Adición (6+3)



Fuente: Pinto (2010).

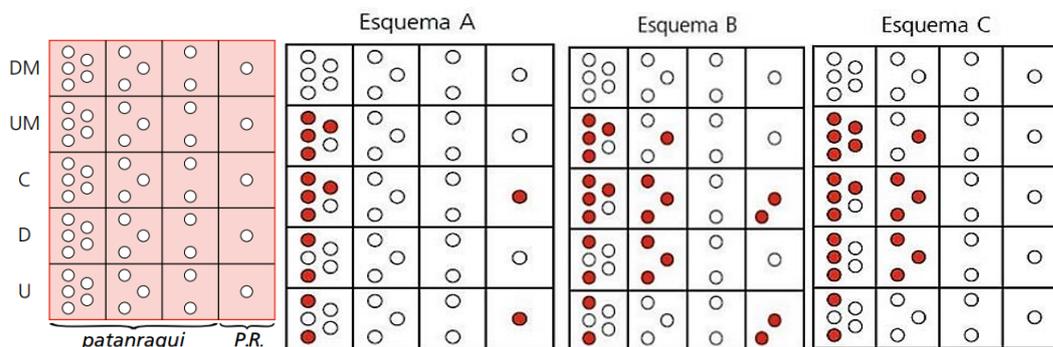
### Experiencia de Jesús Ríos Mencia, Perú, 2013

Para Ríos (2013), manteniendo la posición original de la yupana, en las casillas de la primera, segunda y tercera columna, llamada *Patanraqui*, se representa y opera cantidades de 1 a 10; la cuarta columna, de un círculo, son casillas ‘comodín’, y sirven para reemplazar 5 unidades con un solo grano (*pisqarantin* = P.R.) (Fig. 14). Es una adaptación del método Burns.

Para sumar  $4927 + 1835 = 6762$ , la cantidad 4927 se representa con 4 fichas en la casilla ‘5’ de la cuarta fila; 4 fichas en la casilla ‘5’ y una en la casilla ‘1’ (que vale por 5) de la tercera fila; dos fichas en la casilla ‘5’ de la segunda fila; y dos fichas en la casilla ‘5’ y una en la casilla ‘1’ de la primera fila (esquema A, Fig. 14). Se procede igual con 1835 (esquema B). Se simplifica las fichas para obtener el resultado (Zeballos, 2019).

**Figura 14**

Tablero de Ríos Mencia y cálculo de  $4927+1835$



Fuente: Zeballos (2019)

### Yupana multibase de Herbert Apaza Luque, 2017-Perú

Apaza (2017) propuso teóricamente la Yupana Multibase, funcional para sistemas distintos al decimal

(Pardo, 2018; Zeballos, 2019), aunque para Leonard y Shakiban (2010) solo es posible operar con el sistema quinario-decimal, como en el ábaco chino. La propuesta aplica el método Radicati. En la parte inferior contiene valores de 5, 3, 2 y 1, y en la parte lateral

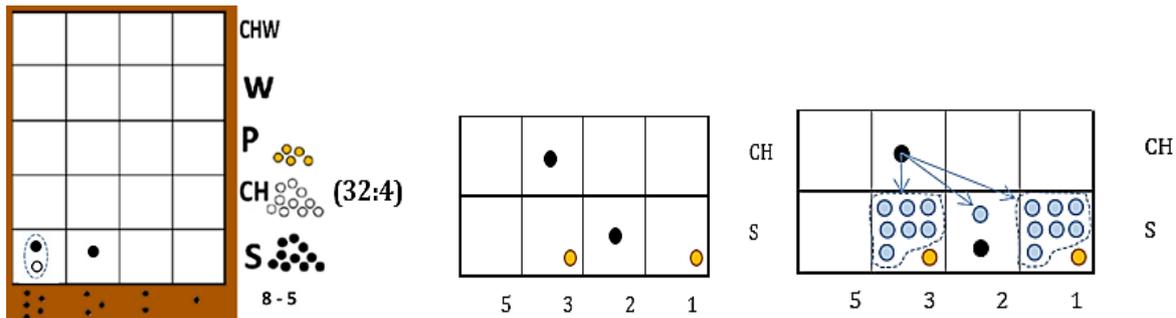


derecha, las iniciales ‘S’, ‘CH’, ‘P’, W’ y ‘CHW’, al igual que Villavicencio. Se mantiene la casilla ‘I’ para la descomposición de los números 6, 4 y 9.

Para efectuar la sustracción  $8-5=3$ , se usa fichas de colores. Se representa 8 con fichas negras y 5 con fichas blancas. Las fichas emparejadas se retiran, y el

resultado será lo que quede (Fig. 15). En la división se emplea la concepción de ‘distribuir en grupos’. El dividendo (color negro) es distribuido en grupos según indica el divisor (color marrón). En  $32/4=8$ , una vez representado el número 32, las fichas serán distribuidas equitativamente en las casillas ‘3’ y ‘1’. La cantidad final que queda en cada casillero es el resultado.

**Figura 15**  
 Sustracción (izquierda) y división (derecha)



Fuente: Apaza (2017).

**Yupana y fracciones de Ángel Palli Salas, Perú, 2015**

Palli (2015) desarrolló un modelo de yupana para enseñar fracciones con el método Radicati. Consta de tres columnas principales signadas con ‘enteros’, ‘denominador’ y ‘numerador’, dividida cada una en tres subcolumnas: Unidades, Decenas y Centenas. Para representar  $2/5$  se coloca una ficha en la casilla ‘2’ de las unidades del ‘numerador’ y otra en la casilla ‘5’ de

las unidades del ‘denominador’ (Fig. 16, izquierda). En una adición de fracciones, se utiliza dos fichas de colores según los sumandos. En  $3/8 + 4/8$ , primero se representa estas cantidades; luego, al ser fracciones homogéneas, en la columna ‘denominador’ queda 8 con un solo color, se suman los numeradores ( $3+4=7$ ), y las fichas restantes, en su forma más simple, son el resultado ( $7/8$ ) (Fig. 16, derecha).

**Figura 16**  
 Yupana fraccionaria representando  $2/5$  (izquierda) y adición de fracciones (derecha)

	ENTERO			DENOMINADOR			NUMERADOR		
	C	D	U	C	D	U	C	D	U
1									
2									●
3									
5						●			

	ENTERO			DENOMINADOR			NUMERADOR		
	C	D	U	C	D	U	C	D	U
1									●
2									
3							●	●	●
5						●	●	●	

Fuente: Palli (2015)

**Yupana, decimales, matrices y vectores**

Se hallaron dos modelos de yupana para operar decimales: la del Callejón de Huaylas expuesta por Pinto (2010) y la de Rojas y Stepanova (2015). No existen evidencias de si los incas operaron con decimales; pero, para Rojas y Stepanova, basta imaginarse una línea en la yupana de Guamán Poma que divida a los números enteros por encima y los decimales por debajo. En

la Figura 17 se representa el número decimal 54,37. Además, Rojas y Stepanova (2015) desarrollaron un método para representar números utilizando matrices. En este método, cada semilla se multiplica por el valor del casillero (5-3-2-1), similar al método De Pascuale. En vez de representar tediosamente los números (sumatorias) con nudos en los *kipus*, proponen representarlo simplificando y de forma compacta a través de la teoría de matrices y vectores.

**Yupana y números enteros de Jesús Malpartida y otros, 2017- Perú**

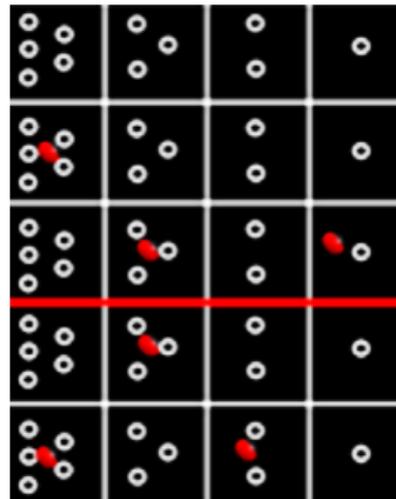
Malpartida et al. (2017) desarrollaron una yupana para operar números enteros consistente en una tabla de doble entrada de 11x11 (Fig. 18), pudiendo ser de menor relación.

**Yupana, logaritmos y potenciación**

Además de Apaza (2017), los investigadores Bustos et al. (2019) plantean hacer uso de la yupana en el aprendizaje de la potenciación y logaritmos con base al modelo Wassén, empleando dos yupanas (principal y auxiliar). Para hallar el  $\log_x n$ , donde n y x son números naturales mayores a 0, primero, se representa 'n' en la yupana auxiliar y 'x' en la principal, y se opera siguiendo un procedimiento establecido por los autores.

**Figura 17**

*Representación de número decimal en la yupana*



Fuente: Rojas y Stepanova (2015).

**Figura 18**

*Yupana adaptada para números enteros*

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Malpartida et al. (2017)

**Desarrollos digitales de la yupana**

Esta riqueza etnocientífica tiene cualidades para adaptarse a las exigencias de la era digital. Uno de los primeros hardware para la yupana de Guamán Poma fue ideado por Gonzales (2015) y comprende una placa de circuito (1), sensores (2), microprocesador (3), interruptores (4, 4', 4''), circuitos integrados (5), pantalla de visualización LCD (6) y cubierta (7). El tablero está dividido en tres filas (U, D, C) con sensores de acuerdo a los agujeros (5-3-2-1) (Fig. 19). Es una herramienta para cálculos matemáticos donde las cantidades se ingresan picando con el mouse.

Rojas y Stepanova (2015), en Chile, desarrollaron una aplicación de la yupana para tabletas, teléfono celular y PC, un juego digital educativo basado en matrices y vectores, en tres idiomas: quechua, inglés y castellano. Consta de un menú con cuatro botones: presentación (*Wasi*), jugar (*Puqllay*), manual, y salir. En la Figura 20, con las semillas móviles (huayruro y maíz), se representa los números 5437 y 235.

Por su parte, Montalvo (2017), en Perú, desarrolló un prototipo de video juego interactivo llamado Yupi 10 para que niños de nivel primario aprendan a sumar y restar (Fig. 21). La adición 18+5 se resuelve activando,



**Figura 19**  
 Yupana hardware y software

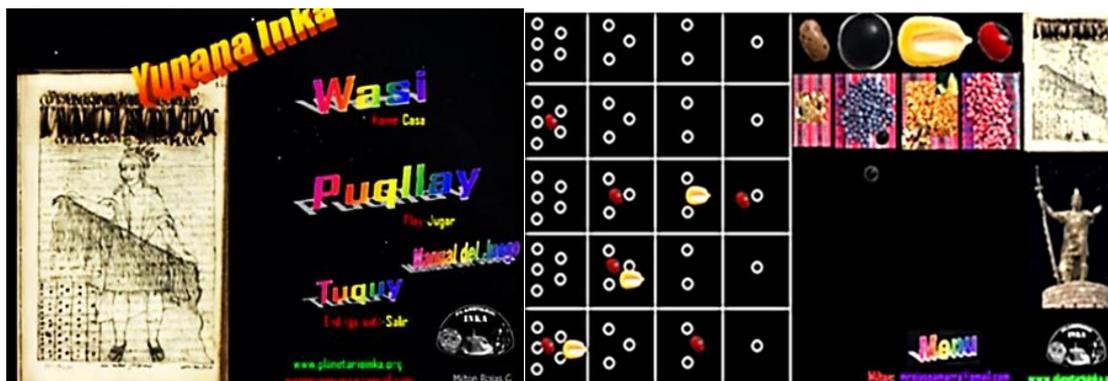


Fuente: Gonzales (2015)

con el cursor, 8 unidades en la primera columna y 1 decena en la segunda columna (a); luego se añade 5 unidades en la primera columna y como en ella solo hay dos agujeros libres (b), se canjea las 10 unidades por una decena (apagar las luces rojas y encender una luz azul en la segunda columna) (c), debiendo prender solo 3 unidades restantes. Las luces que quedan prendidas dan 23 (d).

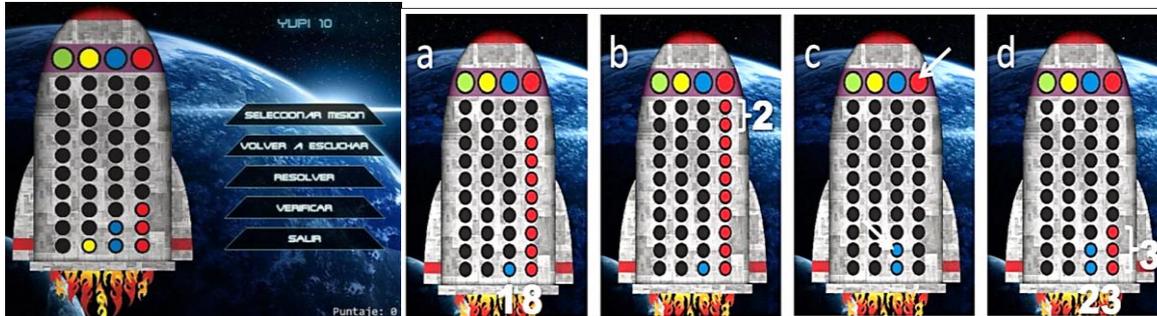
Además de estos desarrollos digitales están las yupanas electrónicas tamaño calculador de Hernández (2004); el software yupana ‘Tawa Pukllay’ de Dhavit y Divapati Prem (2014) en Perú; la ‘yupana digital’ de Jennylee Murillo (2010) en Bolivia y, la aplicación ‘One laptop per child’ del Instituto Tecnológico de Massachusetts, lanzado en 2005, para que niños de 35 países aprendan jugando. Estos desarrollos son poco conocidos en las aulas de formación de formadores, y por profesores de aula, por lo que requieren investigación.

**Figura 20**  
 Yupana digital para tablet, móvil y PC



Fuente: Rojas y Stepanova (2015).

**Figura 21**  
 Yupana Yupi 10 y ejemplo de adición



Fuente: Montalvo-Castro (2014; 2017)

**Investigaciones y experiencias desarrolladas sobre la yupana como material educativo**

**Tabla 1**  
*Experiencias con la yupana según temática, nivel educativo, año y país*

Autor(es)	Tema abordado	Nivel educativo	Año	País
Villavicencio Ubillús.	Operaciones aritméticas	Primaria	1982	Perú
Pacheco Rios.	Operaciones básicas	Primaria	1999	Bolivia
Ortega y Guzmán.	Operaciones básicas	Primaria	2003	Perú
Hernández García.	Operaciones básicas y radicales	Primaria	2004	Colombia
Martínez Avendaño.	Numeración	Primaria	2007	Colombia
Huanca y Payahuanca.	Noción de número	Inicial		Perú
Fernández López.	Operaciones básicas (adultos)	Primaria		Bolivia
Bousany.	Aprendizaje de la aritmética	Primaria	2008	Perú
Lina Nieto.	Operaciones	Primaria	2009	Colombia
Mamani Vargas.	razonamiento lógico matemático (docentes)	Superior		Perú
Murillo Zambrana.	Operaciones básicas. Yupana digital	Primaria	2010	Bolivia
Choquehuanca.	Adición	Primaria		Perú
Pinto Tapia.	Operaciones básicas, decimales. Yupana arqueológica	Primaria		Perú
Mejía Quispe.	Operaciones básicas.	Secundaria	2011	Perú
Quispe y Mamani.	Multiplicación	Primaria	2012	Perú
Seráfico Narciso.	Adición	Primaria		Perú
Ríos Mencía.	Números y operaciones básicas	Primaria	2013	Perú
Arenas y Pacca.	Adición	Primaria		Perú
Vilchez Chumacero.	Número y operaciones aritméticas	Primaria		Perú
Gonzales Arnao.	Operaciones aritméticas	Primaria		Perú
Coolque y Suni.	Números y operaciones	Primaria	2015	Perú
Palli Salas.	Fracciones	Primaria		Perú
Rojas y Stepanova.	Decimales, matrices y vectores. Yupana digital PC	Secundaria		Chile
Apaza y Atrio.	Numeración	Primaria		Perú
Pachas de la Colina.	Suma y resta	Primaria	2016	Perú
Gómez Chaves.	Operaciones básicas	Primaria		Colombia
Aroca y Lasso.	Operaciones básicas	Primaria		Colombia
Apaza Luque.	Operaciones básicas, potencia y radicales	Secundaria		Perú
Montalvo-Castro.	Razonamiento matemático. Yupi 10	Primaria		Perú
Obeso Macassi.	Operaciones básicas	Primaria	2017	Perú
Holguín Atehortúa.	Número	Inicial		Colombia
Malpartida, Meramendi, y Meza.	Multiplicación de Enteros. Yupana 11*11	Secundaria		Perú
Basilio, Javier y Ortega.	Operaciones básicas	Secundaria		Perú
Bernedo Navarrete.	Operaciones aritméticas	Primaria	2018	Perú
Espitia Pinilla.	Problemas multiplicativos	Primaria		Colombia
Pardo Gómez.	Número	Primaria		Perú
Guzmán, Huamani y Moya.	Adición y sustracción	Primaria		Perú
Zeballos Quea.	Operaciones básicas	Primaria		Perú
Saldívar, Saldívar y Goycochea.	Operaciones aritméticas.	Primaria	2019	Perú
Yon y Muena.	Números y operaciones básicas	Inicial		Perú
Bustos, Vergara y Luque.	Operaciones básicas, potencia y logaritmos	Secundaria		Colombia
Mora y Valero.	Operaciones básicas y potenciación	Primaria		Colombia
Carrillo Baldeón.	Adición y sustracción	Primaria	2020	Ecuador
Figueroa y Mena.	Operaciones fundamentales	Primaria		Costa Rica
Paragua, Paragua y Paragua.	Multiplicación de números enteros.	Superior	2021	Perú
Huanca y Mamani.	Adición y sustracción	Primaria		Perú



De acuerdo a la tabla 1, los estudios sobre la yupana en la educación matemática, cronológicamente, datan desde 1982 hasta 2021, identificándose 46 estudios, de los cuales 67,40% se realizaron en Perú, seguidos de Colombia con 19,57%, Bolivia con 6,52%, Chile, Ecuador y Costa Rica con 2,17% cada uno. El 100% de ellos reportan resultados favorables, reduciendo la actitud negativa hacia la matemática (Choquehuanca, 2010). Coincidiendo con Pacheco (1999), el 76,09% de los estudios se enfocan más en niños del nivel primario, seguido del nivel secundario con solo 13,04%, inicial con 6,52% y, superior con 4,35%. En educación primaria, el uso de la yupana se da en contextos rural-bilingües, pudiendo y debiendo aplicarse también en contextos urbano-hispanos, al ser un material de propiedades universales. En educación superior está enfocado en procesos de formación de profesores etnomatemáticos y reflexivos, evitándose el consumismo de la matemática occidental (Blanco-Álvarez, 2016 y Blanco-Álvarez et al., 2017).

Respecto a los temas abordados, el 60,00% está relacionado a la eficacia de la yupana como material educativo en el aprendizaje de operaciones básicas con números naturales, siendo esta la cualidad más conocida. Sin embargo, existen experiencias desarrolladas en aprendizaje de la numeración (15,00%); potenciación (5,00%); razonamiento matemático, radicales, decimales y números enteros (3,33% cada uno) y, logaritmos, decimales, matrices y vectores (1,67% cada uno), que visibilizan las múltiples aplicaciones desconocidas de la yupana, como advierten Apaza y Atrio (2016). Los incas no solo realizaban operaciones básicas en la yupana. Hubo yupanas más complejas en las cuales debieron realizar cálculos superiores con raíz cuadrada, potenciación, sin los cuales hubiera sido imposible realizar grandes obras de ingeniería (Pachas, 2016).

Las yupanas de la Figura 1 aún no han sido motivo de interpretaciones teóricas y, por ende, tampoco de aplicaciones en educación matemática, excepto el modelo arqueológico de Pinto (2010) y el modelo etnológico de Guamán Poma. Este último, adaptado por Villavicencio, está presente en el 80,85% de las experiencias, aun cuando se tiene innovadoras adaptaciones, como la yupana fraccionaria ( $1 = 2,13\%$ ), la yupana para números enteros ( $2 = 4,26\%$ ), yupana decimal ( $2 = 4,26\%$ ), la yupana digital para PC, tableta y celular ( $3 = 6,37\%$ ), y la yupana videojuego ( $1 = 2,13\%$ ), que ofrecen oportunidades lúdicas, innovadoras e interactivas de aprendizaje. No creemos necesario poner límites al uso de las TICs para fortalecer la identidad cultural como plantean Roncoroni y Bailón

(2020). La convergencia entre tecnología étnica y digital dinamizan no solo el aprendizaje de la matemática sino el proceso educativo en general, más aun en escuelas interculturales (Salas et al., 2016).

No hay consenso sobre cuál fue el método original usado por los incas para realizar cálculos. Lo que sí se sabe es que, del conjunto de métodos propuestos, el 95,65% de las investigaciones se han enfocado en el método Burns, coincidiendo con Bousany (2008), lo que obedece a las exigencias psico-pedagógicas del estadio de las operaciones concretas del desarrollo del pensamiento planteado por J. Piaget (6 a 12 años de edad). Esto es que, la yupana de Guamán Poma, adaptada por Villavicencio, está diseñada para el trabajo pedagógico con niños que necesitan manipular objetos para adquirir conceptos (Aroca, 2016; Espinosa y Jiménez, 2019). Sin embargo, es posible emplear la yupana en estudiantes de secundaria y universidad, y en la formación de profesores etnomatemáticos, que se encuentran en la etapa de las operaciones formales (12 años de edad a más). Para ello, existe el método abstracto de Radicatti, obviado en las investigaciones. Consideramos que se deben desarrollar estudios con este método porque ofrece cualidades para el desarrollo del pensamiento formal (Berrocal y Palomino, 2022). Un ejemplo es el del estudiante con bajo rendimiento de la Escuela Gran Bretaña de Perú, que gracias a la yupana identificó el padrón de la serie Fibonacci (Tun y Diaz, 2015).

La verdadera potencialidad de la yupana en la educación matemática, a nuestro entender, aún no ha sido explotada. La yupana sirve para cultivar la capacidad de abstracción, de síntesis y deducción, en suma, para construir el pensamiento matemático (Espinosa y Jiménez, 2019). Es apropiada para adquirir habilidad de cálculo mental, de concentración y seguridad personal (Hernández, 2004). Cronistas como Garcilaso y Guamán Poma indican que los *Quipucamayúq* eran más rápidos y eficaces que los invasores (Rojas y Stepanova, 2015). En las Tradiciones Peruanas, Ricardo Palma narra cómo el inca aprendió rápidamente el ajedrez tan solo ver jugar a los españoles. En 1577, José Acosta, informa a sus superiores en Roma, que los incas aprendían la teología, filosofía y cánones para ser sacerdotes en dos meses, mientras los españoles requerían cinco (Antúnez, 2003).

## Conclusiones

Las bondades de la yupana no han sido explotadas aún en su integridad, solo en lo básico. Hasta el 2022, el 60,00% de los estudios ha enfocado su interés en los

efectos de la yupana, como material educativo, en el aprendizaje de la aritmética básica, especialmente en niños de educación primaria, por lo que más investigaciones al respecto son ya innecesarias. La hipótesis de que los incas no empleaban la yupana en operaciones complicadas, queda superada; las teorías interpretativas, las experiencias y modelos innovadores desarrollados en diversos países de Latinoamérica, enseñan que la yupana tiene una amplia gama de aplicaciones aún desconocidas, posibilidades de trabajo con operaciones complejas como radicales, potencias, decimales, enteros, fracciones, logaritmos, matrices, vectores, y conversiones de base, sugiriéndose reorientar las investigaciones educativas hacia estas temáticas.

Del conjunto de métodos desarrollados sobre el uso de la yupana de Guamán Poma, el 95,65% de las experiencias de educación matemática en América Latina, ha empleado el método Burns. Este método tiene limitaciones, pues responde solo a las exigencias del periodo de las operaciones concretas del desarrollo del pensamiento de Piaget. Esa practicidad y simplicidad metodológica le ha quitado una ventaja potencial a la yupana, la de cálculo mental, necesarios en grados superiores, que ofrece el método Radicati. Este último, debe promoverse en las escuelas, colegios y universidades, para el desarrollo del pensamiento abstracto, más aun considerando los bajos niveles alcanzados en las evaluaciones PISA de la OCDE.

La yupana es un material educativo autóctono e intercultural idóneo no solo para la educación matemática sino para el desarrollo de la inteligencia y el pensamiento matemático y, para la formación de la identidad, la dignidad, la creatividad y actitudes interculturales. Es una posibilidad de investigación y de implementación en las instituciones de formación, en escuelas rurales y ciudadinas de Latinoamérica. Queda el reto de divulgar sus bondades. América en lo cultural está apenas por descubrir.

### Conflicto de intereses

Entre los autores no media conflicto de intereses.

### Referencias

- Antúnez de Mayolo, R.S.E. (2003). Perfeccionamiento intelectual durante el Incanato (1025 – 1532). Impresiones Benito.
- Apaza, H.J. (2017). La yupana, material manipulativo para la educación matemática. Justicia social y el cambio educativo en niños de las comunidades quechuas alto andinos del Perú. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid. <https://repositorio.uam.es/handle/10486/680462>
- Apaza, H.J. y Atrio, S. (2016). Las cantidades en la yupana desde una perspectiva cultural andina. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 36-49. <http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/3>
- Aroca, A. (2016). La definición etimológica de Etnomatemática e implicaciones en Educación Matemática. *Educación matemática*, 28 (2), 175-195. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-58262016000200175&lng=es&tlng=es](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262016000200175&lng=es&tlng=es).
- Berrocal Ordaya, C, y Palomino Rivera, A.A. (2022). Capacidad de resolución de problemas matemáticos y su relación con las estrategias de enseñanza en estudiantes del primer grado de secundaria. *Educación Matemática*, 34 (2), 275-288. <https://doi.org/10.24844/EM3402.10>
- Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A., Oliveras, M.L. (2017). Formación de Profesores de Matemáticas desde la Etnomatemática: estado de desarrollo. *Bolema*, 31(58), 564-589. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a02>
- Bousany, Y. (2008). YUPANCHIS La matemática inca y su incorporación a la clase. Independent Study Project (ISP) Collection. 1. [https://digitalcollections.sit.edu/isp\\_collection/1/](https://digitalcollections.sit.edu/isp_collection/1/)
- Burns, W. (1981). La Tabla de Cálculo de los Incas. *Boletín de Lima*, III(11), 15. <http://www.boletindelima.com/1981-11.htm>
- Bustos, C., Vergara, L.H. y Luque, C.J. (2019). El ábaco inca y las operaciones aritméticas. <https://pdfslide.net/documents/anexo-abacoinca-yupanapdf.html>
- Carrillo, V.P. (2020). Técnicas etnomatemáticas para el desarrollo del cálculo mental de los estudiantes de segundo año de EGB de la Unidad Educativa Carlos María de la Condamine. (Tesis maestría). Universidad Nacional de Chimborazo. <http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/6839>
- Chirinos, A. (2010). Quipus del Tahuantinsuyo. Curacas, Incas y su saber matemático en el siglo XVI. Commentarios SAC.

- Choquehuanca, G. (2010). Uso del ábaco andino en el aprendizaje de la adición en los educandos del III ciclo de la IEP N° 72613 de Llacharapi - Arapa. (Tesis de especialidad). Universidad Nacional del Altiplano. <http://repositorio.unap.edu.pe/bitstream/handle/UNAP/194/EPG414-00414-01.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Cinzia, P. (2008). Encuentros y Desencuentros en la identificación de una relación matemática en la yupana de Guamán Poma de Ayala. [https://www.academia.edu/3989534/Decifrata\\_la\\_yupana\\_di\\_Guaman\\_Poma\\_versione\\_in\\_spagnolo](https://www.academia.edu/3989534/Decifrata_la_yupana_di_Guaman_Poma_versione_in_spagnolo)
- De Acosta, J. (1590). Historia Natural y Moral de las Indias. <http://www.biblioteca.org.ar/libros/71367.pdf>
- De Pasquale N. (2001). Il Volo del Condor, Pescara Informa. Ed. Sigraf, Pescara.
- De Velasco, Padre J. (1789). Historia del Reino de Quito. Tomo II y Parte II. [http://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20191121024016/Historia\\_del\\_reino\\_de\\_Quito.pdf](http://biblioteca.clacso.edu.ar/clacso/se/20191121024016/Historia_del_reino_de_Quito.pdf)
- Espinosa, A. y Jiménez, I.E.R. (2019). Lengua Materna y Comunicación en la Construcción del Pensamiento Matemático. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 33(63), 248-268. <https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a12>
- Espitia, S.E. (2018). Aportes de la yupana a la interpretación de la multiplicación. (Tesis maestría). Universidad Externado de Colombia. <https://bdigital.uexternado.edu.co/handle/001/1101>
- Figueroa, E. y Mena, H. (2020). Material: La yupana y el quipu como herramienta didáctica para el abordaje de las operaciones fundamentales. <https://mep.go.cr/sites/default/files/page/adjuntos/yupana-quipu.pdf>
- Garcilaso de la Vega, I. (1959[1609]). Comentarios Reales de los Incas. UNMSM.
- Gonzales, W.H. (2015). Sistemas de cálculo de los Incas - Desarrollo del software y hardware para la aplicación a la enseñanza. Apuntes Revista digital de arquitectura, 80. <http://apuntesdearquitecturadigital.blogspot.com/2015/12/sistemas-de-calculo-de-los-incas.html>
- Guamán Poma de Ayala, F. (1987 [1615]). Primer nueva crónica y buen gobierno. Historia 16.
- Guzmán, L.E., Huamani, V. y Moya, N.G. (2018). La aplicación de la yupana y la taptana para favorecer la resolución de problemas de adición y sustracción en los estudiantes del 3er grado de educación primaria de la I.E.B. “comunidad Shipiba” del distrito del Rímac durante el año 2016. (Tesis pregrado). Universidad de Ciencias y Humanidades. <https://repositorio.uch.edu.pe/handle/uch/209?show=full>
- Hernández, C.A. (2004). Una Yupana dinámica para cada niño. Nodos y Nudos, 2(17), 7-80. <https://doi.org/10.17227/01224328.1234>
- Leonard, M. y Shakiban, Ch. (2010). The Incan Abacus: A Curious Counting Device. Journal of Mathematics and Culture, 5 (2), 81-106. <https://journalofmathematicsandculture.files.wordpress.com/2016/05/incan-abacus-leonard-ii-final.pdf>
- Malpartida, J.J., Meramendi, L.L. y Meza, R.B. (2017). La yupana y el aprendizaje de la multiplicación de números enteros en los alumnos del primer grado de educación Secundaria de la I. E. Illathupa – Huánuco – 2016. (Tesis pregrado). Universidad Nacional Hermilio Valdizán. <http://repositorio.unheval.edu.pe/handle/UNHEVAL/2727>
- Micelli, M.L. y Crespo, C.R. (2012). Ábacos de América prehispánica. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 5(1). 159-190. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274021551007.pdf>
- Montalvo-Castro, J. (2014). Reciclaje digital educativo. Diseño de un videojuego a partir de la yupana o ábaco de los Incas. [https://www.researchgate.net/publication/273782510\\_Reciclaje\\_digital\\_educativo\\_Diseño\\_de\\_un\\_videojuego\\_a\\_partir\\_de\\_la\\_yupana\\_o\\_abaco\\_de\\_los\\_Incas](https://www.researchgate.net/publication/273782510_Reciclaje_digital_educativo_Diseño_de_un_videojuego_a_partir_de_la_yupana_o_abaco_de_los_Incas)
- Montalvo-Castro, J. (2017). Modelo de interfaz narrativa para facilitar el razonamiento matemático infantil. Digital Education Review, 32, 22-34. [https://revistes.ub.edu/index.php/der/article/viewFile/17336/pdf\\_1](https://revistes.ub.edu/index.php/der/article/viewFile/17336/pdf_1)
- Mora, L.C. y Valero, N. (2019). La yupana como herramienta pedagógica en la primaria. [https://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana\\_como\\_herramienta\\_pedagogica.pdf](https://cmapspublic2.ihmc.us/rid=1J2NH8QTM-2912G6-PZ5/yupana_como_herramienta_pedagogica.pdf)

- Moscovich, V. (2007). Yupana, tabla de contar inca: Estructura interna. *Revista Andina Artículos, notas y documentos*, 44, 71-116. <http://revista.cbc.org.pe/index.php/revista-andina/article/view/349/330>
- Murillo, J.D. (2010). Yupana Digital. <https://es.scribd.com/doc/36501843/Yupana-Digital>
- Oliveras, M.L.; Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de las Etnomatemáticas en el Aula de Matemáticas: posibilidades y limitaciones. *Bolema*, 30(55), 455-480. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a08>
- Orellana, E.A. (2005). Una contabilidad precolombina: la del imperio incaico. [http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/cya/cya\\_v11\\_n22\\_05.pdf](http://bibliotecadigital.econ.uba.ar/download/cya/cya_v11_n22_05.pdf)
- Pachas, C.E. (2016). Jugando aprendemos a sumar y restar con la yupana. <http://repositorio.cultura.gob.pe/handle/CULTURA/355>
- Pacheco, O. (1999). Del Quipu a la yupana: el computador ancestral. Serie Etnogeometría para la etnomatemática N° 2. Cepdi. <https://www.andesacd.org/wp-content/uploads/2019/02/Del-Quipu-Incaico-a-la-Yupana.pdf>
- Palli, A.B. (2015). Yupana fraccionaria. <https://es.slideshare.net/JinTekken007/yupana-fraccionaria-pdf>
- Paragua, M., Paragua, M. y Paragua, C. (2021). Relación entre Yupana y el aprendizaje de la multiplicación de números integrales. *Revista Meta: Rating*, 13 (38), 81-100. <http://dx.doi.org/10.22347/2175-2753v13i38.2956>
- Pareja, D. (1986). Instrumentos prehispánicos de cálculo: el quipu y la yupana. *Revista Integración, temas de matemática*, 4 (1), 37-52. <https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/1205>
- Pinto, M.A. (2010). Guía de uso de la calculadora y yupana inka en la enseñanza de la matemática. <https://es.slideshare.net/mpinto/uso-de-la-calculadora-y-yupana-innka-miguel-angel-pinto-tapia>
- Radicati di Primeglio, C. (1951). Introducción al estudio de los quipus- El sistema contable de los Incas. Librería Studium,
- Ríos, J. (2013). Las Matemáticas ancestrales y la Yupana. *Revista Tarea*, 82, 41-47. [http://tarea.org.pe/images/Tarea82\\_41\\_Jesus\\_Rios.pdf](http://tarea.org.pe/images/Tarea82_41_Jesus_Rios.pdf)
- Rojas-Gamarra, M., y Stepanova, M. (2015). Sistema de numeración Inka en la Yupana y el Khipu. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(3), 46-68. <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274041587004.pdf>
- Roncoroni, U. y Bailón, J. (2020). Pensamiento computacional. Alfabetización digital sin computadoras. *Icono* 14, 18 (2), 379-405. <https://doi.org/10.7195/ri14.v18i2.1570>
- Salas, S.S., Godino, J.D. y Quintriqueo, S. (2016). Análisis Exploratorio de las Prácticas Matemáticas de dos Estudiantes Mapuches en Colegios con y sin Educación Intercultural Bilingüe. *Bolema*, 30 (55), 481-501. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a09>
- Saldívar, C.G., Saldívar, A.J. y Goycochea, D. (2019). Tawa Pukllay - la aritmética inca de reconocimiento de formas y movimientos operable en paralelo y que no requiere cálculos numéricos mentales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 353-363. <http://funes.uniandes.edu.co/14022/1/Saldivar2019Tawa.pdf>
- Tord, M.H. (17 de febrero de 2019). La yupana: El ábaco inca. <https://elcomercio.pe/eldominical/yupana-abaco-inca-noticia-608095-noticia/>
- Tun, M. y Díaz, M.A. (2015). Recuperar la Memoria Histórica y las Matemáticas Andinas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 8(1), 67-86. <http://funes.uniandes.edu.co/6822/1/Diaz2015Recuperar.pdf>
- Urbizagástegui, R. (2014). La escritura inca: quipus, yupanas y tocapus. [https://www.academia.edu/44538397/La\\_Escritura\\_Inca\\_Quipus\\_Yupanas\\_y\\_Tocapus](https://www.academia.edu/44538397/La_Escritura_Inca_Quipus_Yupanas_y_Tocapus)
- Vilca H.M., Yapuchura C.R., Mamani W.W. y Sardón D.L. (2018). Maestros indigenistas y sus experiencias socio-educativas en el altiplano peruano en el Siglo XX. *Comunicación*, 9(2), 90-100. [http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S2219-71682018000200002&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2219-71682018000200002&lng=es&nrm=iso)

Vilca-Apaza, H.M., Bermejo-Paredes, S. y Sardón, D.L. (2021). Los Sistemas de Numeración Aymara: cambios y Valor Formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(71), 1701-1722. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a22>.

Villavicencio, M. (1983). Numeración, algoritmos y aplicación de relaciones numéricas y geométricas

en las comunidades rurales de Puno. Ministerio de Educación.

Wassén, H. (1931). *The Ancient Peruvian Abacus*. Editado por E. Nordenskiöld (ed.). *Comparative ethnographical studies*, vol. 9. Gotemburgo, pp. 189-205.